SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

Sergio Polidoro

SU UNA CLASSE DI OPERATORI DI EVOLUZIONE IPOELLITTICI

14 maggio 1992

Introduzione - I risultati che presenterò in questo seminario sono stati ottenuti in collaborazione con il prof. E. Lanconelli.

Abbiamo dimostrato una disuguaglianza di Harnack invariante per operatori ipoellittici del seguente tipo

(1) $\quad L = \operatorname{div}(AD) + \langle x, BD\rangle - \partial_t$

dove le matrici A e B sono a coefficienti costanti, A simmetrica e semidefinita positiva.

Se indichiamo con Y_j il vettore riga j-esima della matrice $A^{1/2}$ e con $Y = \langle x, BD\rangle - \partial_t$, identificando i vettori con gli operatori differenziali del 1° ordine, l'operatore L si può scrivere nella forma seguente:

(2) $\quad L = \sum_{j=1}^{N} Y_j^2 + Y;$

indichiamo poi con $\mathcal{L}(Y_1,\dots,Y_N,Y)$ l'algebra di Lie generata dagli operatori $Y_1,\dots,Y_N,Y$.

In (1) è contenuta ovviamente l'equazione del calore ($A = I, B = 0$), ma anche l'operatore di Kolmogorov

(3) $\quad Lu = u_{xx} + xu_y - u_t.$

Per questo operatore Kolmogorov ha costruito una soluzione fondamentale esplicita, che presenta una singolarità simile a quella della soluzione fondamentale dell'equazione del calore. Tale soluzione fondamentale è di classe C^∞ fuori dalla diagonale, quindi (3) è ipoellittico.

Come aveva già osservato Hörmander nella introduzione di [H], utilizzando il metodo di Kolmogorov si può costruire esplicitamente una soluzione fondamentale per (1) e fornire una condizione necessaria e sufficiente di ipoellitticità. Tale condizione è la seguente

Ker(A) non contiene sottospazi non banali B-invarianti

ed è equivalente alla condizione di Hörmander

(H) $\quad$ rango $\mathcal{L}(Y_1,\dots,Y_N,Y) = N + 1$ $\quad$ in ogni punto di $\mathbb{R}^{N+1}$.

Una generalizzazione dell'equazione di Kolmogorov è stata studiata da Garofalo e Lanconelli [GL], che hanno dimostrato una disuguaglianza di Harnack nel caso in cui, sostanzialmente, l'algebra di Lie $\mathfrak{L}(Y_1,\dots,Y_N,Y)$ è generata dagli operatori $Y_1,\dots,Y_N,Y$ e dai loro commutatori del primo ordine.

Una soluzione fondamentale esplicita per (1) nel caso ipoellittico è stata determinata anche da Kuptcov [K].

Nel nostro lavoro a partire dalla forma esplicita della soluzione fondamentale abbiamo individuato una struttura di gruppo in $\mathbb{R}^{N+1}$ rispetto alle cui traslazioni a sinistra l'operatore L risulta invariante.

Inoltre nella classe $\mathfrak{L}$ degli operatori ipoellittici del tipo (1) abbiamo individuato la sottoclasse $\mathfrak{L}_0$ degli operatori invarianti rispetto ad un gruppo di dilatazioni. Per questi operatori, un risultato astratto di Bony [B] permette di dimostrare facilmente una disuguaglianza di Harnack, che risulta essere invariante rispetto allo stesso gruppo di dilatazioni corrispondente all'operatore.

Abbiamo poi dimostrato che ogni operatore $L \in \mathfrak{L}$ ha una parte principale $L_0 \in \mathfrak{L}_0$ tale che, se Γ e Γ_0 sono le soluzioni fondamentali rispettivamente di L e di L_0 con polo in $z_0 = (0,0)$, allora

$$\frac{1}{c}\Gamma_0(z) \leq \Gamma(z) \leq c\,\Gamma_0(z)$$

per ogni $z \in \mathbb{R}^{N+1}$ tale che $\Gamma_0(z) > 1$, con c = costante positiva.

§ 1 - Costruzione della soluzione fondamentale

Sia

$$(1.1)\quad L = \operatorname{div}(AD) + \langle x, BD\rangle - \partial_t$$

con A, B matrici costanti N×N, A simmetrica e semidefinita positiva.

Determiniamo una soluzione del problema di Cauchy

$$(1.2)\quad \begin{cases} Lu = 0 & \text{per } \; t > 0 \\ \mathrm{u}_{|t=0} = \varphi & \varphi \in C_0^\infty(\mathrm{R}^N) \end{cases}$$

Indichiamo con ^ la trasformata di Fourier rispetto alle variabili spaziali. Procedendo formalmente da (1.2) si ottiene

$$(1.3)\quad \begin{cases} \left(\langle A\xi,\xi\rangle + \operatorname{tr}(B)\right)\hat{u} + \left\langle B\xi, D_\xi \hat{u}\right\rangle + \partial_t \hat{u} = 0 \\ \hat{u}_{|t=0} = \hat{\varphi} \end{cases}$$

Integrando (1.3) col metodo delle caratteristiche si ottiene

$$(1.4)\quad \begin{cases} \hat{u}(t,\xi) = \hat{\varphi}(\eta)\exp\left(-t\operatorname{tr}(B) - \int\limits_0^t \langle A\exp(sB)\eta, \exp(sB)\eta\rangle\, ds\right) \\ \xi = \exp(tB)\eta \end{cases}$$

Da (1.4), ponendo

$$(1.5)\quad E(t) = \exp(-t^{T}B) \qquad C(t) = \int\limits_0^t E(s)A\,{}^{T}E(s)\,ds$$

si ricava

$$(1.6)\quad \hat{u}(t,\xi) = \hat{\varphi}({}^{T}E(t)\xi)\exp\left(-t\operatorname{tr}(B) - \langle C(t)\xi,\xi\rangle\right)$$

Se

$$(1.7)\quad C(t) > 0 \quad \forall t > 0$$

la (1.6) si può invertire e dà

$$u(x,t) = (2\pi)^{-N} \int\limits_{\mathbf{R}^N} \varphi(y)\left(\int\limits_{\mathbf{R}^N} e^{-i\langle y, E(-t)\xi\rangle + i\langle x,\xi\rangle} \exp\left(-t\operatorname{tr}(B) - \int\limits_0^t \langle A\,E(s)\xi, E(s)\xi\rangle ds\right) d\xi\right)$$

onde, la soluzione fondamentale di L con polo nel punto $(y,0)$ per $t>0$ è data da

$$\Gamma(x,t;y,0)=(2\pi)^{-N}e^{-t\,\mathrm{tr}(B)}\int_{\mathbb{R}^N}\exp\left(-i\langle x-E(t)y,\xi\rangle-\langle C(t)\xi,\xi\rangle\right)d\xi$$
$$=\frac{(2\pi)^{-N}e^{-t\,\mathrm{tr}(B)}}{\sqrt{\det C(t)}}\int_{\mathbb{R}^N}\exp\left(-i\langle C^{-1/2}(t)(x-E(t)y),\xi\rangle-|\xi|^2\right)d\xi$$

In definitiva

$$\Gamma(x,t;y,0)=\begin{cases}\dfrac{(4\pi)^{-N/2}e^{-t\,\mathrm{tr}(B)}}{\sqrt{\det C(t)}}\exp\left(-\dfrac{1}{4}\langle C^{-1}(t)(x-E(t)y),x-E(t)y\rangle\right) & \text{per } t>0\\ 0 & \text{per } t\le 0\end{cases}$$

Se poniamo

$$(1.8)\qquad \Gamma(x,t)=\begin{cases}\dfrac{(4\pi)^{-N/2}e^{-t\,\mathrm{tr}(B)}}{\sqrt{\det C(t)}}\exp\left(-\dfrac{1}{4}\langle C^{-1}(t)x,x\rangle\right) & \text{per } t>0\\ 0 & \text{per } t\le 0\end{cases}$$

possiamo quindi scrivere la soluzione fondamentale di L con polo nel punto (y,τ) nel modo seguente

$$(1.9)\qquad \Gamma(x,t;y,\tau)=\Gamma(x-E(t-\tau)y,t-\tau)$$

La condizione (1.7) si può esprimere in termini delle matrici A e B. A questo scopo introduciamo alcune notazioni. Poniamo

$$X_j=\sum_{k=0}^{N}a_{j,k}\partial_{x_k},\quad j=1,\dots,N,\quad Y=\langle x,BD\rangle.$$

Indichiamo poi con $\mathcal{L}(X_1,\dots,X_N,Y)$ l'algebra di Lie generata da $X_1,\dots,X_N,Y$.

Proposizione 1 - *Sono equivalenti le affermazioni seguenti:*

(i) $C(t)>0$ *per ogni* $t>0$

(ii) Ker(A) *non contiene sottospazi non banali B-invarianti*

(iii) *rango* $\mathcal{L}(X_1,\dots,X_N,Y)=N$ *in ogni punto di* $\mathbb{R}^N$.

Dimostrazione - Osserviamo, preliminarmente, che $C(t)\ge 0$ per ogni $t>0$ in quanto A è semidefinita positiva. Per la stessa ragione, per ogni fissato $\xi\in\mathbb{R}^N$,

$\xi \neq 0$, la funzione $t \mapsto \langle C(t)\xi, \xi\rangle$ è monotona non decrescente. Di conseguenza se, per un $t > 0$, risulta $\langle C(t)\xi, \xi\rangle = 0$, allora

$$\langle C(s)\xi, \xi\rangle = 0 \quad \text{per} \quad 0 < s \leq t.$$

Ricordando la definizione di C (si veda (1.5)) questo implica

$$\langle A^T E(s)\xi, {}^T E(s)\xi\rangle = 0 \quad \text{per} \quad 0 < s \leq t$$

e quindi

$$A^T E(s) = 0 \quad \text{per} \quad 0 < s \leq t$$

onde (cfr. la (1.5))

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{s^k}{k!} AB^k\right)(\xi) = 0 \quad \text{per} \quad 0 < s \leq t.$$

Questo implica

$$AB^k(\xi) = 0 \quad \text{per ogni} \quad k \geq 0.$$

Resta così provato che

(1.10) $AB^k(\xi) = 0 \;\forall\, k \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \xi = 0.$

Poichè questa condizione è equivalente alla (ii), abbiamo provato che (i) e (ii) sono equivalenti.

Proviamo ora l'equivalenza di (i) e (iii). A questo scopo introduciamo le seguenti notazioni:

$$X_{(j,o)} = X_j, \quad X_{(j,k+1)} = \left[X_{(j,k)}, Y\right], \quad k \geq 0, j = 1, \ldots, N.$$

Identificando l'operatore $Z = \sum_{i=1}^{N} c_i \partial_{x_i}$ col vettore ($c_1, \ldots, c_N$), si riconosce immediatamente che

$$X_{(j,k)} = \text{riga } j\text{–esima di } AB^k, \quad k \geq 0, j = 1, \ldots, N.$$

Pertanto

(1.11) rango $\mathfrak{L}(X_1, \ldots, X_N, Y)(0) = N + 1$

se, e solo se, vale la (1.10) e, quindi, la (iii).

Questo conclude la prova della Proposizione in quanto la (1.11) è equivalente alla (iii).

Osservazione 1 - Se indichiamo con $Y_1,\dots,Y_N$ i vettori (operatori differenziali) riga di $A^{1/2}$ e con Y_0 l'operatore

(1.12) $Y_0 = Y - \partial_t$,

possiamo esprimere l'operatore L nel modo seguente

$$L = \sum_{j=1}^{N} Y_j^2 + Y_0.$$

Ora, per quanto visto nel corso della prova della proposizione precedente,la condizione

(iii') rango $\mathcal{L}(Y_1,\dots,Y_N,Y) = N$

è equivalente alla seguente

(1.10') $\qquad A^{1/2}B^k(\xi) = 0 \ \forall\, k \geq 0 \ \Rightarrow\ \xi = 0.$

Poichè Ker$(A^{1/2})$ = Ker(A), le condizioni (1.10) e (1.10') sono fra loro equivalenti. Tali risultano quindi anche (iii) e (iii'). D'altra parte (iii') è equivalente alla condizione di Hörmander

(1.13) rango $\mathcal{L}(Y_1,\dots,Y_N,Y_0) = N+1$

in ogni punto di $\mathbb{R}^{N+1}$.

Osservazione 2 - L'esplicita espressione della soluzione fondamentale (1.9), suggerisce una altrettanto esplicita struttura di gruppo su $\mathbb{R}^{N+1}$ rispetto alla quale l'operatore L risulta invariante per traslazioni a sinistra. Si tratta di un caso particolare dell'analisi generale condotta da Rothschild-Stein [RS].

Posto

$$(x,t)\circ(y,\tau) = (y + E(\tau)x, t+\tau), \quad (x,t),(y,\tau) \in \mathbb{R}^{N+1},$$

allora $(\mathbb{R}^{N+1},\circ)$ è un gruppo il cui elemento neutro è (0,0). Inoltre, se $(y,\tau) \in \mathbb{R}^{N+1}$,

$$(y,\tau)^{-1} = (-E(-\tau)y, -\tau).$$

Di conseguenza, la soluzione fondamentale di L si può scrivere nella maniera seguente (cfr. la (1.9))

$$\begin{aligned}\Gamma(x,t;y,\tau) &= \Gamma\big((y,\tau)^{-1}\circ(x,t);0,0\big)\\ &= \Gamma\big((y,\tau)^{-1}\circ(x,t)\big)\end{aligned}$$

Posto poi

(1.14) $l_\zeta : \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}^{N+1}, \qquad l_\zeta(z) = \zeta^{-1}\circ z$

con un calcolo diretto si riconosce subito che

$$l_\zeta \circ L = L \circ l_\zeta$$

per ogni $\zeta \in \mathbb{R}^{N+1}$.

§ 2 - Operatori invarianti per dilatazioni

Innanzitutto osserviamo che un cambiamento di variabili lineare non altera la forma dell'operatore L così come, ovviamente, la condizione di Hörmander (H).

Possiamo quindi supporre di scegliere su $\mathbb{R}^N$ una base ortonormale, a ventaglio, per i sottospazi di $\mathbb{R}^N$

$$V_0, V_1, \ldots, V_r$$

ove

$$V_k = \text{span}\{X_{(j,i)} | j = 1,\ldots,N, i = 0,\ldots,k\}$$

è lo spazio vettoriale generato da $X_1,\ldots,X_N$ e dai loro commutatori con Y di "altezza" $\leq$ k. Supponiamo anche di aver scelto su V_0 una base di autovettori della matrice A. Rispetto a questa base la matrice A assume quindi la seguente forma

$$(2.1) \quad A = \begin{bmatrix} A_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad A_0 = \text{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_{p_0}), \quad \lambda_j > 0, \quad 1 \leq j \leq p_0,$$

Inoltre

Proposizione 2 - *La matrice B si esprime nella seguente forma:*

$$(2.2) \quad B = \begin{bmatrix} * & B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & B_r \\ * & * & * & \cdots & * \end{bmatrix},$$

ove B_i *è una matrice* $p_{i-1} \times p_i$ *di rango massimo uguale a* p_i, i = 1,...,r. *Risulta poi* $p_0 = \dim (V_0)$, $p_0 + \ldots + p_i = \dim (V_i)$, i = 1,...,r. *I coefficienti delle matrici indicate con* * *possono essere del tutto arbitrari.*

Dimostrazione - Se rappresentiamo la matrice $B = (B_{i,j})$ dividendola nei blocchi $B_{i,j}$ di dimensione $p_{i-1} \times p_i$, i,j = 0,...,r , allora la matrice AB ha la forma

$$AB = \begin{bmatrix} A_0B_{0,0} & A_0B_{0,1} & A_0B_{0,2} & \cdots & A_0B_{0,r} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Ricordiamo che $X_{(j,1)}$ è la riga j-esima di AB e che d'altra parte $X_{(j,1)} \in V_1$, deve essere $A_0B_{0,2} = 0,\ldots,A_0B_{0,r} = 0$. Inoltre, poichè $V_1 = \text{span}\ \{\ X_{(j,0)}, X_{(j,1)} \mid j = 1,\ldots,N\ \}$, deve anche essere $A_0B_{0,1}$ di rango massimo. Quindi, poichè A_0 è non singolare, si ha $B_{0,2} = 0,\ldots, B_{0,r} = 0$, $B_1 \equiv B_{0,1}$ di rango massimo.

Possiamo allora esprimere la matrice B nella forma seguente:

$$B = \begin{bmatrix} * & B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ B_{1,0} & B_{1,1} & B_{1,2} & \cdots & B_{1,r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{r,0} & B_{r,1} & B_{r,2} & \cdots & B_{r,r} \end{bmatrix}$$

Consideriamo ora i vettori $X_{(j,2)}$ che sono le righe j-esime della matrice AB^2.

$$AB \cdot B = \begin{bmatrix} * & A_0B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ B_{1,0} & B_{1,1} & B_{1,2} & \cdots & B_{1,r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{r,0} & B_{r,1} & B_{r,2} & \cdots & B_{r,r} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} * & * & A_0B_1B_{1,2} & A_0B_1B_{1,3} & \cdots & A_0B_1B_{1,r} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Ragionando come prima si osserva che deve essere $A_0B_1B_{1,2}$ di rango massimo e $A_0B_1B_{1,3} = 0,\ldots, A_0B_1B_{1,r} = 0$. Poichè inoltre A_0B_1 ha rango massimo, risulta infine che $B_1 \equiv B_{1,2}$ ha rango massimo e $B_{1,3} = 0,\ldots, B_{1,r} = 0$. La matrice B si scrive quindi nella seguente forma

$$B = \begin{bmatrix} * & B_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & B_2 & 0 & \cdots & 0 \\ B_{2,0} & B_{2,1} & B_{2,2} & B_{2,3} & \cdots & B_{2,r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{r,0} & B_{r,1} & B_{r,2} & B_{r,3} & \cdots & B_{r,r} \end{bmatrix}$$

Procedendo per induzione sulle righe di B si arriva ad esprimere la matrice nella forma (2.2).

Proviamo ora che quando i blocchi * ~~sono tutti~~ nulli l'operatore L è invariante rispetto ad un gruppo di dilatazioni. Premettiamo alcune definizioni:

Fissati $\alpha_1,\ldots,\alpha_N,\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 = 1$, per ogni $\lambda > 0$ poniamo

(2.3) $\quad D(\lambda)\colon \mathrm{R}^{N+1} \to \mathrm{R}^{N+1}, \quad D(\lambda)(x,t) = (\lambda^{\alpha_1}x_1,\ldots,\lambda^{\alpha_N}x_N,\lambda^{\beta}t),$

$(D(\lambda))_{\lambda>0}$ è un gruppo di dilatazioni. Diremo che L è <u>invariante</u> rispetto a questo gruppo se

$$L \circ D(\lambda) = \lambda^2 D(\lambda) \circ L \qquad \forall \lambda > 0.$$

Proposizione 3 - *L'operatore L è invariante rispetto ad un gruppo di dilatazioni del tipo* (2.3) *se e solo se tutti i blocchi * della forma canonica* (2.2) *della matrice B sono nulli. In tal caso le dilatazioni del gruppo di invarianza sono del tipo seguente:*

(2.4) $\quad D(\lambda) = \mathrm{diag}\left(\lambda \mathrm{I}_{p_0}, \lambda^3 \mathrm{I}_{p_1}, \ldots, \lambda^{2r+1}\mathrm{I}_{p_r}, \lambda^2\right)$

dove I_k *indica la matrice identità* $k \times k$.

Dimostrazione - Per ogni $(a,b) \in \mathbb{R}^{N+1}$ poniamo

$$u(x,t) = \exp\left(\langle a,x\rangle + bt\right)$$

Allora

$$(L \circ D(\lambda))u(x,t) = \lambda^2\left(\sum_{i=1}^{p_0}\lambda^{2\alpha_i-2}a_i^2 + \sum_{i,j=1}^{N} b_{i,j}(\lambda^{\alpha_i}x_i)\lambda^{\alpha_j-\alpha_i-2}a_j - \lambda^{\beta-2}b\right)(u \circ D(\lambda))(x,t)$$

mentre

$$\lambda^2(D(\lambda)\circ L)u(x,t) = \lambda^2\left(\sum_{i=1}^{p_0}a_i^2 + \sum_{i,j=1}^{N} b_{i,j}(\lambda^{\alpha_i}x_i)a_j - b\right)(u \circ D(\lambda))(x,t).$$

Pertanto se L è $(D(\lambda))_{\lambda>0}$-invariante dovrà essere

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_{p_0} = 1, \quad \beta = 2, \quad b_{i,j}\lambda^{\alpha_j-\alpha_i-2} = b_{i,j} \quad \text{per } i,j = 1,\ldots,N.$$

Da questa, tenendo presente la (2.2), segue che i blocchi * sono nulli e che $D(\lambda)$ è del tipo (2.4).

Viceversa, se sono verificate queste ultime condizioni, si riconosce immediatamente che L è $(D(\lambda))_{\lambda>0}$-invariante.

Nel seguito indicheremo con $D_0(\lambda)$ la restrizione di $D(\lambda)$ ad $\mathbb{R}^N$. Indicheremo inoltre con $\mathfrak{L}$ la classe degli operatori (1.1) verificante la condizione (H) e con $\mathfrak{L}_0$ la sottoclasse degli operatori di $\mathfrak{L}$ invarianti rispetto ad un gruppo di dilatazioni $(D(\lambda))_{\lambda>0}$.

Se $L \in \mathfrak{L}_0$ la matrice B risulta nilpotente (cfr; la Proposizione 3)(*) e quindi le matrici E e C sono dei polinomi nella variabile t.. Possiamo anche ottenere una più esplicita rappresentazione della matrice C. A questo scopo richiamiamo alcune notazioni. Se $(D(\lambda))_{\lambda>0}$ è un gruppo di dilatazioni del tipo (2.4) indichiamo con $Q+2$ la <u>dimensione omogenea</u> di $\mathbb{R}^{N+1}$ rispetto a $(D(\lambda))_{\lambda>0}$:

(2.5) $\quad Q+2 = p_0 + 3p_1 + \ldots + (2r+1)p_r + 2$

Osserviamo che $Q+2$ è anche definito dalla

(2.6) $\quad \det(D(\lambda)) = \lambda^{Q+2}.$

Nel seguito chiameremo Q la <u>dimensione omogenea spaziale</u>. Ovviamente Q è la dimensione omogenea di $\mathbb{R}^N$ rispetto al gruppo $(D_0(\lambda))_{\lambda>0}$.

Proposizione 4 - *Se $L \in \mathfrak{L}_0$ allora*

(2.7) $\quad C(t) = D_0(\sqrt{t})C(1)D_0(\sqrt{t})$

e quindi, se Γ indica la soluzione fondamentale di L con polo in (0,0),

(2.8) $\quad \Gamma(x,t) = \dfrac{c_N}{t^{Q/2}} \exp\left(-\dfrac{1}{4}\left\langle C^{-1}(1) D_0\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)x, D_0\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)x\right\rangle\right)$

dove c_N *è una costante.*

Dimostrazione - Poichè L è invariante rispetto a $(D(\lambda))_{\lambda>0}$ risulta

$$\Gamma \circ D(\lambda) = \lambda^{-Q}\Gamma$$

e quindi, per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ e $t > 0$,

(*) Non vale il viceversa

$$\lambda^{-Q} = \left(\frac{\det(C(t))}{\det\left(C(\lambda^2 t)\right)} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{4} \left\langle C^{-1}(\lambda^2 t) D_0(\lambda) x, D_0(\lambda) x \right\rangle + \frac{1}{4} \left\langle C^{-1}(t) x, x \right\rangle \right)$$

Questo implica

$$D_0(\lambda) C^{-1}(\lambda^2 t) D_0(\lambda) = C^{-1}(t)$$

e quindi, scegliendo $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, la (2.7). La (2.8) segue poi dalla (1.7) e dal fatto che

$$\det\left(D_0(\lambda)\right) = \lambda^{Q}.$$

§ 3 - Operatori non invarianti per dilatazioni

Lo scopo di questo paragrafo è quello di provare che per ogni operatore $L \in \mathfrak{L}$ esiste un operatore $L_0 \in \mathfrak{L}_0$ tale che se Γ e Γ_0 indicano rispettivamente le soluzioni fondamentali di L e di L_0 con polo in (0,0), risulta

$$\Gamma \cong \Gamma_0$$

su ogni fissato insieme di livello di Γ (o di Γ_0).

Sia L un operatore del tipo

$$L = \operatorname{div}(AD) + \langle x, BD \rangle - \partial_t. \tag{3.1}$$

In questo e nei successivi paragrafi supporremo di aver fissato una base ortonormale in $\mathbb{R}^N$ in modo che le matrici A e B in (3.1) si scrivano nelle forme canoniche (2.1) e (2.2). Indicheremo poi con L_0 l'operatore che si ottiene da L cancellando nella matrice B tutti i blocchi indicati con *. Chiameremo L_0 la parte principale di L. L'operatore L_0 risulta invariante rispetto ad un gruppo di dilatazioni $(D(\lambda))_{\lambda>0}$ (cfr. Proposizione 2). Ricordiamo che con $D_0(\lambda)$ indichiamo la restrizione di $D(\lambda)$ ad $\mathbb{R}^N$:

$$D_0(\lambda) = D(\lambda)_{|\mathbb{R}^N}.$$

Siano ora $C(t)$ e $C_0(t)$ le matrici definite in (1.5) relative rispettivamente agli operatori L e L_0. Vale allora il seguente

Lemma 1 - *Se indichiamo* $C(t) = (c_{i,j}(t))$, $C_0(t) = (c_{0,i,j}(t))$, $i,j = 1,\dots,N$, *risulta*

$$c_{i,j}(t) = c_{0,i,j}(t)(1 + tO(1)), \quad per\ t \to 0, \quad i,j = 1,\dots,N. \tag{3.2}$$

ove O(1) *indica una funzione limitata in* $(x,t) \in]0,1] \times \mathbb{R}^N$.

Dimostrazione - Esprimiamo la funzione integranda $E(s)A^TE(s)$ in (1.5) come polinomio in s con resto. Poichè

$$E(s) = \sum_{k=0}^{2r} (-1)^k \frac{s^k}{k!} {}^TB^k + O(s^{k+1}) \quad \text{per } s \to 0$$

(dove $O(s^{k+1}) = s^{k+1}O(1)$), possiamo scrivere

$$E(s)A^TE(s) = \sum_{k=0}^{2r} (-1)^k \frac{s^k}{k!} F_k + O(s^{k+1}) \quad \text{per } s \to 0 \tag{3.3}$$

con

$$(3.4) \quad F_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} {}^T B^j A B^{k-j}$$

Proveremo che la (3.2) è conseguenza della particolare forma delle matrici F_k, che a sua volta dipende dalla forma canonica di A e di B.

Abbiamo già notato che

$$AB^m = \begin{bmatrix} *^{(1)} & \cdots & *^{(1)} & A_0B_1\ldots B_m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

con il blocco $A_0B_1\ldots B_m$ di rango massimo, posto nella (m + 1)-esima colonna di blocchi.

I blocchi $*^{(1)}$ sono stati ottenuti moltiplicando A_0, qualche blocco del tipo B_j ed almeno un blocco $*$ di B. Osserviamo esplicitamente che per l'operatore L_0 tutti i blocchi $*^{(1)}$ sono nulli.

Moltiplicando AB^m a sinistra per ${}^TB^j$ si ottiene

$$(3.5) \quad {}^TB^jAB^m = \begin{bmatrix} *^{(2)} & \cdots & *^{(2)} & *^{(2)} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ *^{(2)} & \cdots & *^{(2)} & *^{(2)} & 0 & \cdots & 0 \\ *^{(2)} & \cdots & *^{(2)} & {}^TB_j\ldots{}^TB_1A_0B_1\ldots B_m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Di nuovo il blocco ${}^TB_j\ldots{}^TB_1A_0B_1\ldots B_m$ ha rango massimo ed occupa la posizione (j+1,m+1) nella suddivisione in blocci della matrice ${}^TB^jAB^m$. I blocchi $*^{(2)}$ hanno le stesse proprietà dei blocchi $*^{(1)}$: in particolare sono nulli per l'operatore L_0.

Dalla (3.5) e dalla (3.4) si deduce che la matrice F_k ha le seguenti proprietà:

(i) tutti i blocchi di posizione (j+1,m+1), $0 \le j, m \le r$, con $m + j > k$ sono necessariamente nulli;

(ii) i blocchi di posizione (j+1,m+1) con m + j = k sono esattamente ${}^TB_j \dots {}^TB_1A_0B_1 \dots B_m$, sia per l'operatore L che per L_0;

(iii) i blocchi di posizione (j+1,m+1) con m + j < k sono somme di blocchi $*^{(2)}$ e sono tutti nulli per l'operatore L_0.

Quindi, fissati j,m ∈ ℕ, 0 ≤ j, m ≤ r, il blocco di posizione (j+1,m+1) nell'espressione (3.3) risulta essere

$$(3.6)\qquad \left(E(s)A^TE(s)\right)_{j+1,m+1} = {}^TB_j \dots {}^TB_1A_0B_1 \dots B_m(-1)^k\frac{s^k}{k!}\cdot \\ \cdot\left(1+*_1^{(3)}s+\dots+*_{2r-k}^{(3)}s^{2r-k}\right)+O(s^{2r+1}) \quad \text{per } t \to 0$$

dove k = j + m + 2 ed i blocchi $*_j^{(3)}$ hanno le stesse proprietà dei blocchi $*^{(2)}$. Poichè infine la matrice B corrispondente ad L_0 è nilpotente, la (3.6) relativa a L_0, oltre ad avere tutti i blocchi $*_j^{(3)}$ nulli, vale senza il resto $O(s^{2r+1})$. A causa di quest'ultima osservazione, integrando la (3.6) sull'intervallo [0,t], dalla definizione di C(t) (vedi (1.5)), si ottiene la (3.2).

Lemma 2 - *Se poniamo*

$$(3.7)\qquad M(t) = D_0\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)(C(t)-C_0(t))D_0\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right), \quad per\ t>0,$$

risulta

$$(3.8)\qquad \|M(t)\| = O(t) \quad per\ t \to 0.$$

Dimostrazione - Se indichiamo M(t) con $\left(m_{i,j}(t)\right)_{i,j=1,\dots,N}$, per il Lemma 1 si ha, per $t \to 0$,

$$m_{i,j}(t) = O(t)\left(\left(D_0\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)C_0(t)D_0\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\right)_{i,j}\right) = O(t)c_{0,i,j}(1).$$

Questo prova la (3.8).

Lemma 3 - *Per ogni* t > 0 *risulta*

$$(3.9)\qquad \langle C(t)x,x\rangle = \langle C_0(t)x,x\rangle(1+tO(1))$$

$$(3.10)\qquad \langle C^{-1}(t)x,x\rangle = \langle C_0^{-1}(t)x,x\rangle(1+tO(1))$$

ove O(1) *indica una funzione limitata in* $(x,t) \in]0,1] \times \mathbb{R}^N$.

Dimostrazione - per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ e per ogni $t > 0$, si ha

$$\frac{\langle (C(t) - C_0(t))x, x\rangle}{\langle C_0(t)x, x\rangle} = \left(\text{posto } x = D_0\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)y\right)$$

$$= \frac{\langle M(t)y, y\rangle}{\langle C_0(1)y, y\rangle}$$

in forza della (3.7) e della (2.7). Da questa, per il Lemma 2, segue la (3.9).

Analogamente,

$$\frac{\langle (C_0^{-1}(t) - C^{-1}(t))x, x\rangle}{\langle C^{-1}(t)x, x\rangle} = (\text{posto } x = C(t)y)$$

$$= \frac{\langle C(t)C_0^{-1}(t)C(t)y, y\rangle - \langle C(t)y, y\rangle}{\langle C(t)y, y\rangle} =$$

$$(3.11) \qquad = \frac{\langle (C(t) - C_0(t))C_0^{-1}(t)(C(t) - C_0(t))y, y\rangle}{\langle C(t)y, y\rangle} +$$

$$+ \frac{\langle (C(t) - C_0(t))y, y\rangle}{\langle C(t)y, y\rangle} = R(x,t) + S(x,t)$$

Ora, poichè a causa della (3.9) risulta

$$(3.12) \quad \frac{\langle C(t)y, y\rangle}{\langle C_0(t)y, y\rangle} = 1 + tO(1),$$

ancora per la (3.9) si ha

$$(3.13) \quad R(x,t) = \frac{\langle C_0(t)y, y\rangle}{\langle C(t)y, y\rangle} \frac{\langle (C(t) - C_0(t))y, y\rangle}{\langle C_0(t)y, y\rangle} = tO(1).$$

D'altra parte, per le (3.7) e (3.8), risulta

$$\frac{\langle (C(t) - C_0(t))C_0^{-1}(t)(C(t) - C_0(t))y, y\rangle}{\langle C_0(t)y, y\rangle} = \left(\text{posto } y = D_0\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)z\right)$$

$$= \frac{\langle M(t)C_0^{-1}(1)M(t)z, z\rangle}{\langle C_0(1)z, z\rangle}$$

Da questa e dalla (3.13) segue che $S(y,t) = t^2O(1)$; quest'ultima relazione unitamente alla (3.11), alla (3.12) e alla (3.13), prova la (3.10).

Possiamo ora provare il principale risultato di questo paragrafo

Teorema 1 - *Sia L un operatore del tipo* (3.1) *e sia* L_0 *la parte principale di L. Allora, se indichiamo rispettivamente con* Γ *e* Γ_0 *le soluzioni fondamentali con polo in* (0,0) *di L e di* L_0 (*cfr.*(1.8)), *per ogni* $b > 0$ *esiste una costante* $a > 0$ *tale che*

$$(3.14)\quad \frac{1}{a}\Gamma_0(x,t) \le \Gamma(x,t) \le a\Gamma_0(x,t)$$

per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^{N+1}$ *tale che* $\Gamma_0(x,t) > b$.

Dimostrazione - Siano C e C_0 le matrici definite in (1.5) relativamente agli operatori L edL_0. Per la (3.9) del Lemma 3, ricordando che il determinante di una matrice simmetrica definita positiva èil prodotto dei suoi autovalori e che questi ultimi si possono determinare con un procedimento di mini-max applicato alla forma quadratica associata alla matrice stessa, risulta:

$$(3.15)\quad \det C(t) = \det C_0(t)(1 = tO(1)), \quad per\ t \to 0+.$$

D'altra parte, per la (3.10)

$$(3.16)\quad \exp\left(-\frac{\langle C^{-1}(t)x,x\rangle}{4}\right) = \exp\left(-\frac{\langle C_0^{-1}(t)x,x\rangle}{4}\right)\exp\left(t\langle C_0^{-1}(t)x,x\rangle O(1)\right).$$

Ora, se $\Gamma_0(x,t) > b$, risulta (cfr. (1.8) e (2.8))

$$(3.17)\quad \langle C_0^{-1}(t)x,x\rangle \le 4Q\log\left(\left(\frac{c_N}{b}\right)^{2/Q}\frac{1}{t}\right) \quad \text{per } t \to 0.$$

Dalla (1.8) e dalle (3.15), (3.16) e (3.17) segue subito la (3.14).

Osserviamo esplicitamente che nella (3.14) i ruoli di Γ e Γ_0 si possono invertire. Questo segue subito dalla prova del Teorema.

§ 4 - Disuguaglianza di Harnack

In questo paragrafo dimostreremo una disuguaglianza di Harnack per gli operatori della classe $\mathfrak{L}_0$, cioè per gli operatori

$$(4.1) \quad L = div(AD) + \langle x, BD \rangle - \partial_t$$

che risultano invarianti rispetto ad un gruppo di dilatazioni. La prova si basa sull'invarianza di L tanto rispetto alle dilatazioni $D(\lambda)$ (cfr. (2.3)) quanto rispetto alle traslazioni l_ς (cfr. (1.14)), e sulla seguente disuguaglianza di Harnack debole, dovuta a Bony.

Teorema (Bony [B], Teorema 7.1) - *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^{N+1}$ e sia T un insieme denso in Ω. Allora per ogni compatto $K \subseteq \Omega$ esistono $z_1,\dots,z_p \in \Omega$ ed una costante $c > 0$ tali che*

$$\sup_K u \le c\big(u(z_1)+\ldots+u(z_p)\big)$$

per ogni $u \in C^\infty(\Omega)$, $u \ge 0$, verificante $Lu = 0$ in Ω.

Da questo Teorema e dalla ipoellitticità di L, segue immediatamente la seguente

Proposizione 5 - *Sia $(u_n)_{n\ge1}$ una successione di soluzioni di (4.1) tali che per ogni $n \in \mathbb{N}$ $u_n \le u_{n+1}$. Sia poi u il limite puntuale della successione $(u_n)_{n\ge1}$. Supponiamo che $u < \infty$ in un insieme denso in Ω. Allora $u \in C^\infty(\Omega)$ e $Lu = 0$ in Ω.*

Dimostrazione - Dal Teorema di Bony segue che $(u_n)_{n\ge1}$ converge uniformemente su ogni compatto di Ω, e quindi $u \in C(\Omega)$. Essendo poi $L u_n = 0$ in Ω per ogni $n \in \mathbb{N}$, risulta anche $L u = 0$ nel senso delle distribuzioni. Poichè L è ipoellittico risulta $u \in C^\infty(\Omega)$ e $Lu = 0$ in senso classico.

Per ogni $r > 0$ e per ogni fissato $\varepsilon \in]0,1[$ poniamo

$$\Omega_r(z_0) = \left\{ z \in \mathrm{R}^{N+1} \,\middle|\, \Gamma(z;z_0) > \left(\tfrac{1}{r}\right)^{Q/2} \right\},$$

$$K_r(z_0) = \Omega_r(z_0) \cap \left\{ (x,t) \in \mathrm{R}^{N+1} \,\middle|\, t \le t_0 - \varepsilon r \right\}.$$

Per le soluzioni di $Lu = 0$ vale allora la seguente formula di media, che si ottiene con un metodo del tutto standard a partire dall'identità di Green:

(4.2) $$u(z_0) = \frac{1}{r^{Q/2}} \int_{\Omega_r(z_0)} M(z_0, z) u(z) dz$$

per ogni $z_0 \in \Omega$ e per ogni $r > 0$ tale che $\overline{\Omega_r(z_0)} \subseteq \Omega$. In (4.2) $M(z_0,z)$ indica il nucleo

$$M = \frac{\langle AD\Gamma, D\Gamma \rangle}{\Gamma^2}, \quad \Gamma = \Gamma(z_0, z).$$

Vale allora il seguente

Teorema 2 - *Sia $L \in \mathfrak{L}_0$ e sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^{N+1}$. Supponiamo che per un fissato z_0 e per un $r > 0$ risulti $\overline{\Omega_{2r}(z_0)} \subseteq \Omega$. Allora per ogni fissato $\varepsilon > 0$ esiste una costante $c > 0$ tale che, per ogni $u \geq 0$ soluzione di $Lu= 0$ in Ω risulta*

(4.3) $$\sup_{K_r} u \leq c\, u(z_0)$$

con $c = c(\varepsilon)$ indipendente da r.

Dimostrazione - Per l'invarianza rispetto alle traslazioni ed alle dilatazioni, non è restrittivo supporre $z_0 = (0,0)$ ed $r = 1$.

Supponiamo per assurdo che la (4.3) non sia vera. Allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $u_n \in C^\infty(\Omega)$, $u_n \geq 0$, tale che

$$\sup_{K_1} u_n > 4^n u_n(0).$$

Ovviamente per ogni $n \in \mathbb{N}$ $u_n(0) \neq 0$ (altrimenti per il principio del massimo forte dovrebbe essere $u_n \equiv 0$ in $\Omega_2(0)$). Possiamo quindi definire le seguenti funzioni

$$v_n(z) = \frac{u_n(z)}{u_n(0)}, \quad v(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(z)}{2^n}$$

e porre

$$T = \{ z \in \Omega | v(z) < +\infty \}.$$

T è non vuoto in quanto $v(0) = 1$, inoltre T è denso in $\Omega_2(0)$. Se infatti T non fosse denso, eisterebbero $z \in \Omega_2(0)$ e $\rho > 0$ tali che $v_{|B(z,\rho)} \equiv +\infty$. Ma questo non è possibile in quanto, per la formula di media, deve risultare

$$1 = v(0) = \int_{\Omega_2(0)} M(0,z) v(z) dz = +\infty$$

dal momento che il nucleo M è strettamente positivo tranne che in un insieme di misura nulla.

Applichiamo ora la Proposizione 5 alla successione delle somme parziali

$$\left(w_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{v_k(z)}{2^k} \right)_{n \geq 1}$$

risulta allora che la funzione v è limitata su $K_1(0)$. Questo è in contraddizione con il fatto che

$$v \geq \frac{v_n}{2^n} \geq 2^n$$

almeno in un punto di $K_1(0)$.

Il Teorema 2 vale anche, con lo stesso enunciato, per un operatore della classe $\mathfrak{L}$ non appartenente alla classe $\mathfrak{L}_0$. Questo segue sostanzialmente dal Teorema 1 sul confronto fra la soluzione fondamentale di un operatore e quella della sua parte principale.

Bibliografia essenziale

[B] J. -M.Bony, *Principe de Maximum, Inégalité de Harnack et Unicité du Problème de Cauchy pour les Opérateurs Elliptiques Dégénérés,* Ann. Inst. Fourier, Grenoble , **19,1** (1969), 277-304.

[GL] N. Garofalo, E. Lanconelli, *Level Sets of the Fundamental Solution and Harnack Inequality for Degenerate Equations of Kolmogorov Type,* Trans. Amer. Math. Soc., **321** (1990), 775-792.

[H] L. Hörmander, *Hypoelliptic Second Order Differential Equations,* Acta Math., **119** (1967), 147-171.

[K] L. P. Kuptcov, *Fundamental Solutions for a Class of Second-Order Elliptic-Parabolic Equations,* Differents. Uravneniya , **8** (1972), 1649-1660.

[RS] L. P. Rothschild, E. M. Stein, *Hypoelliptic Differential Operators and Nilpotent Groups,* Acta Math., **137** (1977), 247-320.